**РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРИНЦИПУ ДІРІХЛЕ**

Вивчати матеріал з теми рекомендується не протягом кількох занять, а з п’ятого і до одинадцятого класу по мірі вивчення програмового матеріалу, враховуючи психологічний та розумовий розвиток самої дитини.

В чому ж полягає принцип Діріхле? Для учнів 5-6 класів зручніше всього подавати його в жартівливій формі: «Якщо в 3 клітках сидить не менше 7 кроликів, то існує хоча б одна клітка, де сидить не менше, ніж 3 кролика.»

Слід звернути увагу учнів на слова "не менше", "хоча б", оскільки саме ці фрази дозволяють по-перше, розпізнати задачі на принцип Діріхле, а по-друге, тільки використовуючи такі формулювання можна розв'язувати ці задачі. Як же довести цей принцип? Доведення базується на методі доведення від супротивного.

Припустимо, що у кожній клітці сидить не більше двох(тобто один, два або жодного) кроликів. Тоді в усіх клітках сидить не більше 6 кроликів. А це суперечить умові, оскільки кроликів є 7. Отже, наше припущення було хибним, тобто знайдеться хоча б одна клітка, в якій сидить не менше 3 кроликів.

Але клітки і кролики є не в кожній задачі. Тому най першим кроком при розв'язуванні задач є визначення того, кого прийняти за «клітки», а кого за «кроликів».

Розглянемо кілька найбільш простих прикладів:

**Приклад 1.** В класі навчається 35 учнів. Доведіть , що серед них є принаймні 2, у яких день народження одного числа (можливо, в різні місяці).

Доведення. Тут „клітки" - дні місяця, а „кролики" -учні. Оскільки треба довести, що є принаймні 2 таких учні, то припускаємо, що таких учнів є не більше одного. Тоді за 31 день місяця може відсвяткувати свій день народження не більше 31 учня. Але це суперечить умові (учнів 35). Отже, наше припущення неправильне. Тому є в класі хоча б 2 таких учні, у яких день народження одного числа.

**Приклад 2:** В магазин привезли 25 ящиків яблук трьох різних сортів.

У кожному ящику – окремий сорт. Довести, що серед них

знаходится принаймні 9 ящиків яблук одного сорту.

Доведення: «Клітки» — сорти яблук; «кролики»" — ящики.

Припустимо, що кожного сорту не більше 8 ящиків. Тоді 8\*3=24, а ящиків 25.

Отже, наше припущення хибне. Тому є принаймні 9 ящиків яблук одного

сорту.

**Приклад 3.** У п'ятих класах школи навчається 160 учнів. Довести, що знайдуться 4 учні, у яких день народження припаде на один і той самий тиждень.

Доведення: У році може бути максимум 53 тижні. їх і приймемо за «клітки», а за «кроликів» — учнів. Розсаджуватимемо «кроликів» у ті «клітки», що відповідають їхнім дням народженням. Оскільки 160 : 53 = , то за принципом Діріхле знайдеться «клітка», у якій принаймні 4 «кролики». Це означає, що знайдеться тиждень, на який припаде день народження відразу чотирьох учнів.

Після опрацювання найпростіших міркувань переходимо до другого етапу: відокремлення деяких даних. Якщо в умові задачі поряд з основною умовою йдеться про відокремлені дані, то їх спочатку відділяють в розв'язанні і лише потім використовують принцип Діріхле.

**Приклад 4.** В класі навчається 30 учнів. У диктанті 1 учень зробив 13 помилок, а інші — менше. Довести, що є принаймні 3 учні, що зробили однакову кількість помилок.

Доведення : 1 учень відділений в умові, тоді учнів 30—1 = 29. Помилок може бути від 0 до 12, тобто їх кількість — 13. Припустимо, що не більше 2-х учнів зробили однакову кількість помилок, тоді всього в класі (13\*2=26) — не більше 26 учнів, а це суперечить умові, адже їх 29. Отже, наше припущення хибне, і в класі є хоча б 3 учні, що зробили однакову кількість помилок.

**Приклад 5:** 10 школярів на олімпіаді розв'язали 35 задач, причому серед них є такі, що розв'язали рівно одну, рівно дві, рівно три задачі. Довести, що є учень, який розв'язав не менше 5 задач.

Доведення: потрібно відокремити трьох учнів: одного — з однією задачею, одного — з двома, одного — з трьома задачами. Тоді відокремимо відповідно і 1+2+3=6 задач. Маємо: 10—3=7учнів, 35—6=29 задач.

Припустимо, що кожен з 7 учнів розв'язав не більше 4 задач, тоді всього розв'язано не більше 28 задач. А це суперечить умові. Тому є хоча б один учень, що розв'язав 5 задач.

**Приклад 6:**

На п’яти полицях книжної шафи розміщено 160 книжок, причому на одній з них – 3 книжки.

Довести, що знайдеться полиця, на якій лежить не менше 40 книжок.

Доведення. Припустимо, що на кожній з решти чотирьох полиць не більше ніж 39 книжок. Тоді на всіх п’яти полицях лежить не більше ніж а це суперечить умові. Отже, на одній з полиць не менше ніж 40 книжок.

**Приклад 7:**

Усередині правильного шестикутника зі стороною 1 дм розташовано 7 точок. Довести, що

серед них знайдуться дві точки, відстань між якими не перевищує 1 дм.

Доведення. Правильний шестикутник можна розбити на 6 правильних трикутників зі стороною

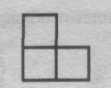
1 дм. За принципом Діріхле принаймні в одному з цих шести трикутників будуть лежати дві із

семи точок. Відстань між ними не перевищить сторони трикутника, тобто не буде більшою за 1 д

Принцип Діріхле використовується і під час розв'язування задач на зафарбовування.

**Приклад 8:** Кожну грань куба зафарбовано у білий або чорний колір. Довести, що знайдуться однаково зафарбовані грані, що мають спільне ребро.

Доведення : Розглянемо довільну вершину куба. У ній перетинаються три грані. Приймемо за «клітки» кольори, а за «кроликів» — грані, що перетинаються в одній вершині. Їх усього три. Тому за принципом Діріхле знайдеться клітка, у якій міститься два «кролики». А це означає, що знайдуться дві грані, які мають спільне ребро (оскільки вони мають спільну точку) і зафарбовані однаково.

**Приклад 9:** На шаховій дошці розмірами 8x8 клітинок розставлено 31 фігуру. Довести, що знайдеться вільна фігура, яка складається з трьох клітинок і зображена на малюнку.

Доведення: Для того щоб не було вільної фігури, складеної з трьох клітинок, у будь-якому квадраті розмірами 2х2 клітинки має розміститися не менше двох фігур. Оскільки можна покрити всю дошку 16-ма квадратиками розмірами 2x2 клітинки, що не перекриваються, то всього фігур має бути не менше 32, а у нас є 31. Отже, за сформульованим принципом знайдеться квадрат розмірами 2x2 клітинки, в якому опиниться лише одна фігура. У ній і міститься вільна фігура, що складається з трьох клітинок.

**Додаткові задачі**

1. В гуртку 10 школярів. Чи можна стверджувати, що серед цих гуртківців є хоча б 2, які відзначають день народження в одному й тому самому місяці?

2. В шести класах школи навчається 60 учнів. Довести, що хоча б двоє з них святкують день народження в один і той самий тиждень.

3. У школі 740 учнів. Довести, що принаймні троє з них народилися в один і той самий день.

4. У похід пішло 12 туристів. Наймолодшому з них 20 років, а найстаршому - 30.

Чи є серед них однолітки?

5. В шаховому турнірі кожен шахіст зіграв з кожним по одній партії. Всі отримали принаймні по одній перемозі. Довести, що якісь двоє шахістів у підсумку мають однакову кількість перемог.

6. У вищій лізі першості України з футболу виступає 16 команд. У другому крузі чемпіонату кожні дві команди повинні зіграти між собою один матч. Довести, що завжди є дві команди, які провели однакову кількість ігор чемпіонату.

7. У районі 15 шкіл. Довести, що як би між ними не розподіляли 90 комп'ютерів, обов'язково знайдуться дві школи, які отримали однакову кількість комп'ютерів (можливо — жодного).

8. В таксі їдуть 5 пасажирів. Доведіть, що серед них знайдуться два пасажири, які мають однакову кількість знайомих серед цих 5-ти пасажирів.

9. Одинадцять школярів відвідують п’ять гуртків (деякі з учнів не обов’язково відвідують всі гуртки). Доведіть, що серед них є два учні, А і В, такі, що всі гуртки, які відвідує А, відвідує й В.